6ο μάθημα

12/11/19

Σειρές Fourier - Μιγαδική αναπαράσταση

Μπορούμε να γράψουμε μια $f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e_m(x)$.

όπου $f_m = \int_{-\pi}^{\pi} e_m^*(x) f(x)\, dx$, εργαζόμενοι στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ ή $[0, 2\pi]$.

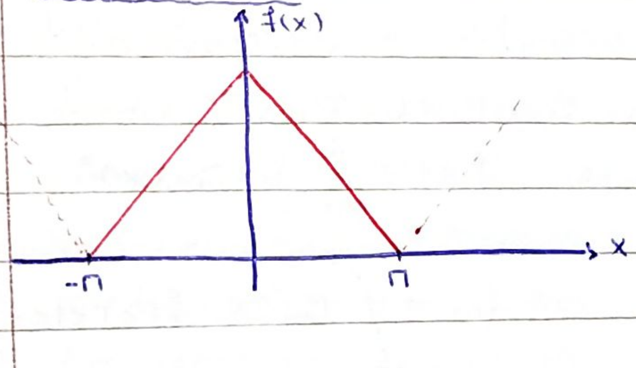
Η ανάπτυξη κατά Fourier παραμένει αναλλοίωτη αν $x \to x + 2\pi$ με προϋπόθεση η $f(x)$ να είναι περιοδική με $f(x) = f(x+2\pi)$.

Άρα μπορούμε να επεκτείνουμε σ' όλο το $\mathbb{R}$ αρκεί η $f(x)$ να είναι περιοδική

ΠΑΡΑΔ.: Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συν/ση

$$f(x) = \pi - |x| \quad , \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

Σχηματικά:



Απ.:

Η f είναι συνεχής στο $[-\pi, \pi]$ κ' έχουμε ότι: $(m \neq 0)$

$$f_m = \int_{-\pi}^{0} e_m^*(x)(\pi + x)\, dx + \int_{0}^{\pi} e_m^*(x) \cdot (\pi - x)\, dx$$

$$\Rightarrow f_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\pi\cancelto{0}{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx}dx} + \int_{-\pi}^{0} xe^{-imx}dx - \int_{0}^{\pi} xe^{-imx}dx\right)$$

$e_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{imx}$

$e_m^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-imx}$

$$\overset{m\neq 0}{\Rightarrow} f_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{im} xe^{-imx}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{m^2}\cdot e^{-imx}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{im} xe^{-imx}\Big|_{0}^{\pi} - \frac{1}{m^2}\cdot e^{-imx}\Big|_{0}^{\pi}\right)$$

Εφόσον $e^{im\pi} = (-1)^m$ τελικά,

$$f_m = \begin{cases} \frac{4}{m^2\sqrt{2\pi}} , & m \text{ περιττό} \\ 0 , & m \text{ άρτιο} \end{cases}$$

αν $m=0$, τότε $f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\pi\int_{-\pi}^{\pi} dx + \int_{-\pi}^{0} x dx - \int_{0}^{\pi} x dx\right)$

$$\Rightarrow f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(2\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi^2}{\sqrt{2\pi}}$$

άρα $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\pi^2}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty}\left(\frac{4}{m^2\sqrt{2\pi}} e^{imx} + \frac{4}{m^2\sqrt{2\pi}} e^{-imx}\right)\right)$

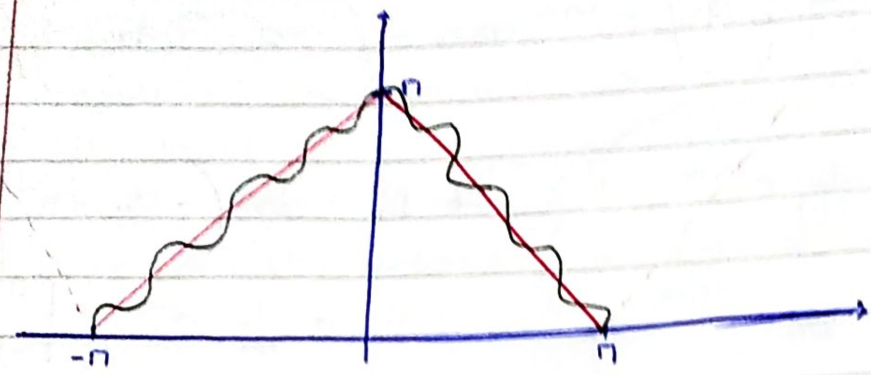
$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\pi^2 + 8\cdot\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty}\frac{\cos(mx)}{m^2}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\pi^2 + 8\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\cos[(2l+1)x]}{(2l+1)^2}\right)$$

Τύπος Euler:

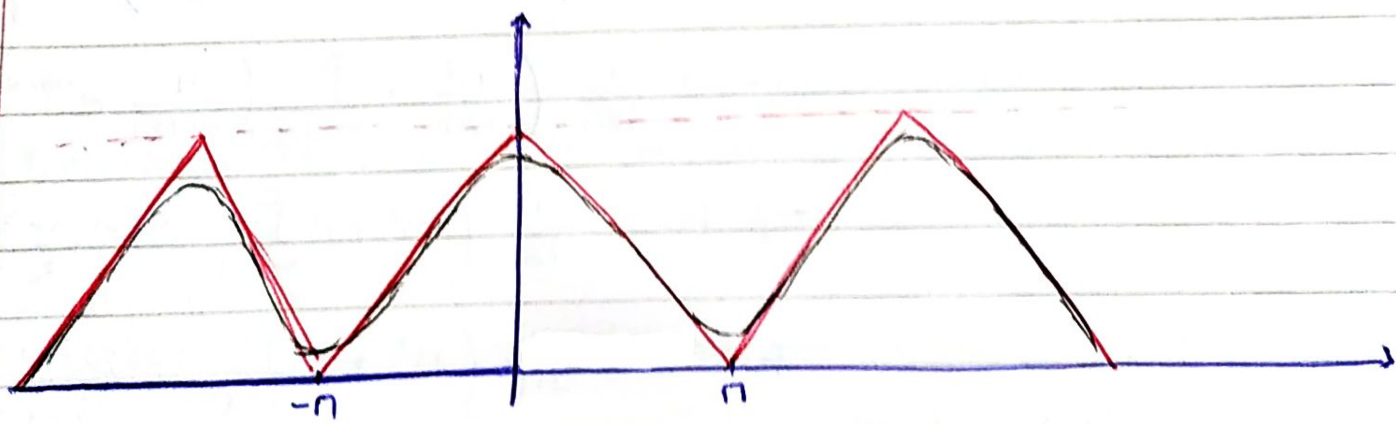
$\cos(mx) = \frac{e^{imx} + e^{-imx}}{2}$

$\rightarrow$



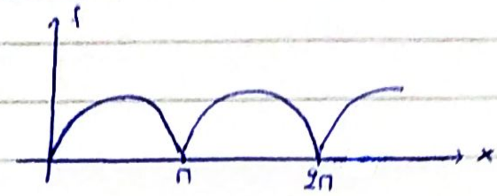
Παρατηρείται το φαινόμενο Gibbs ?
Όχι, αφού δεν παρατηρείται ασυνέχεια στη συν/ση. Άρα έχω ομαλή αναπαράσταση
(κόκκινη γραμμή κ' ΟΧΙ η μαύρη)

Παρατήρηση: Μπορούμε να επεκτείνουμε την θεώρηση μας σε όλη την πραγματική ευθεία $(-\infty, +\infty)$, θεωρώντας ότι η $f(x)$ είναι περιοδική, με περίοδο 2π.
Η συν/ση αυτή $f(x) = \pi - |x|$ είναι περιοδική, άρα αναπτύσσεται σε σειρά Fourier σ' όλο το $\mathbb{R}$.



ΑΣΚΗΣΗ: Να απαρασταθεί η $f(x) = |\sin x|$ κ' να αναπτυχθεί σε Fourier

ΛΥΣΗ:



κ' για Fourier ομοίως με πριν βρίσκω εύκολα τους συντελεστές Fourier κ' το λύνω...

$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e_m(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m e_m(x) + f_m e_m^*(x)$ (μιγαδ. αναπ. Fourier)

ή $f(x) = c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos(mx) + s_n \sin(mx)$ (πραγμ. αναπ. Fourier)

"Θεωρία τελεστών"

• ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένας τελεστής είναι μία απεικόνιση ενός δ.χ. σ' έναν άλλο δ.χ. Ορίζονται από τη δράση τους. Δηλ. ο κανόνας με τον οποίο από ένα διαν/μα $|f\rangle \in S$ μεταβαίνουμε στο $|g\rangle \in S'$ μέσω της δράσης του τελεστή A, $|f\rangle \longrightarrow |g\rangle = A|f\rangle$ A: τελεστής

Π.χ. • Έστω $\mathbb{R}^3$, $|x\rangle \in \mathbb{R}^3$, $|x\rangle = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\vec{k}$

τότε $|y\rangle = a\cdot|x\rangle$, $a \in \mathbb{R}$, a: είναι η απλούστερη μορφή τελεστή

• Έστω F ο συναρτησιακός χώρος των αναλυτικών συν/σεων (οποιασδήποτε τάξης παράγωγο). Αυτός είναι δ.χ. κ' ορίζουμε σ' αυτόν τον τελεστή παραγώγισης

$|f\rangle \longrightarrow |g\rangle = D|f\rangle$ ή $g(x) = \frac{df(x)}{dx}$, αν η $f(x) = x$

τότε $\frac{dx}{dx} = 1 = g(x)$